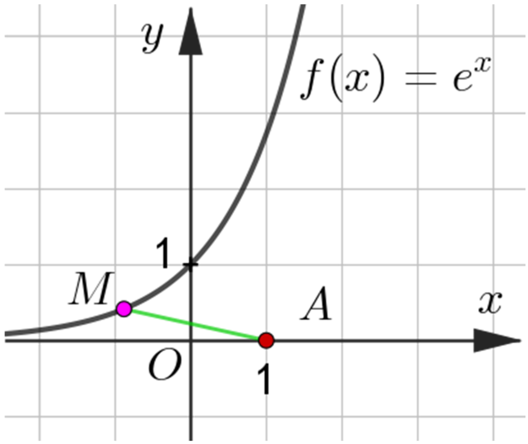
▶R11 Rendre une distance minimale

Dans un repère orthonormé, $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et on considère $A(1;0)$.
M est un point variable de $\mathcal{C}$.
Pour quelle position du point M la distance AM est-elle minimale et que vaut cette distance minimale ?



Rappel : rendre minimale une distance revient à rendre minimale le carré de cette distance.

Corrigé

On est dans un repère orthonormé donc on peut utiliser la formule de la distance : $AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$,
autrement dit : $AM^2 = (x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2$.
Pour $M(x; f(x))$, c'est-à-dire $M(x; e^x)$ et $A(1;0)$ on obtient :

$$AM^2 = (x-1)^2 + (e^x - 0)^2$$
$$AM^2 = x^2 - 2x + 1 + e^{2x}$$

Posons, pour tout réel x : $g(x) = x^2 - 2x + 1 + e^{2x}$.
g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g'(x) = 2x - 2 + 2e^{2x}$$
$$g''(x) = 2 + 4e^{2x}$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}, e^a > 0$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}, e^{2x} > 0$,
$4e^{2x} > 0$ puis $2 + 4e^{2x} > 0$ c'est-à-dire : $g''(x) > 0$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, g''(x) > 0$ donc g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Or, $g'(0) = 2(0) - 2 + 2e^{2(0)} = -2 + 2 \times 1 = 0$.

Étudions le signe de $g'(x)$:

• si $x < 0$
g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre, par conséquent $g'(x) < g'(0)$, or $g'(0) = 0$ donc $g'(x) < 0$.
Résumons : $\forall x \in]-\infty; 0[, g'(x) < 0$.

• si $x > 0$
g' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle conserve le sens de la relation d'ordre, par conséquent $g'^{(x)} > g'(0)$, or $g'(0) = 0$ donc $g'(x) > 0$.
Résumons : $\forall x \in]0; +\infty[, g'(x) > 0$.

Comme $g(0) = 0^2 - 2(0) + 1 + e^{2(0)} = 0 - 0 + 1 + 1 = 2$,
on obtient finalement le tableau de variation (sans limites) de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
Sens de variation de g		↘	2	↗	

Le minimum de AM^2 est 2, atteint en 0, donc le minimum de AM est $\sqrt{2}$ lui aussi atteint pour $x = 0$.
On a alors : $M(0; e^0)$ c'est-à-dire :$M(0;1)$.

Conclusion

La distance AM, $M \in \mathcal{C}$, est minimale pour $M(0;1)$.